Abordări cantitative în luarea deciziilor

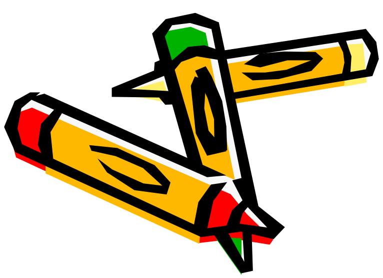
mgorun@inf.ucv.ro

OR/MS

Cercetările operaționale, „**Operation Research** (OR)” constituie o ramură interdisciplinară a matematicilor aplicate care utilizează modelarea matematică, statistica şi algoritmii pentru a obține soluții optime pentru probleme complexe.
Stiința managementului, „**Management Science** (MS)” este o abordare a deciziei manageriale bazată pe metode științifice, cum ar fi modelarea matematică.

Merită reținut că termenul de “Management Science (MS)” se referă la problemele managementului afacerilor în timp ce „Operations Research (OR)” este strâns legat de teoria optimizării modelelor din realitatea înconjurătoare.

Specialiştii în OR folosesc statistica, teoria probabilităților, teoria aşteptării, teoria jocurilor, teoria grafurilor, teoria deciziilor, şi optimizări. Datorită naturii computaționale ale acestor discipline, Informatica (Computer Science) este o componentă importantă.



Bazele Cercetărilor operaționale au fost puse în perioada celui de-al doilea război mondial când echipe de cercetători de diverse specializări (matematicieni, ingineri) au rezolvat cu metode științifice, probleme de strategie şi tactică militară. După război, Cercetările operaționale s-au dezvoltat în aplicații nemilitare. Un moment semnificativ în această dezvoltare se consideră a fi apariția metodei **simplex** de rezolvare a problemelor de programare liniară (George Dantzig, 1947).

Problem solving

„**Problem solving**” este procesul ce identifică diferențele dintre între stadiul actual şi stadiul dorit al afacerilor, încercând să rezolve aceste diferențe. Acest proces presupune:

- luarea deciziei (**decision making**) care constă în:

- structurarea problemei
    1. identificarea şi definirea problemei
    2. determinarea unui set de soluţii alternative
    3. determinarea criteriilor care vor fi folosite pentru a evalua soluţiile alternative.

- analizarea problemei
    4. evaluarea soluţiilor alternative
    5. alegerea unei soluţii

- implementarea soluției alese
- evaluarea rezultatelor, care constă în a răspunde la întrebarea „soluția aleasă este satisfăcătoare?”

Exemplu:procesul de luare a deciziilor

Presupunem că sunteți din Craiova, student în an terminal, în preajma licenței și că vă doriți o carieră satisfăcătoare. Ați făcut demersuri necesare angajării și din fericire ați fost acceptat de către trei firme aflate în locații diferite.
Problema constă în alegerea acelui job care să vă asigure drumul spre o cariera mulțumitoare.

Mulțimea de soluții alternative este formată din cele trei oferte de angajare:

- acceptarea postului oferit de o firmă din Craiova
- acceptarea postului oferit de o firmă din București
- acceptarea postului oferit de o firmă din Cluj-Napoca

Să stabilim care sunt criteriile de evaluare ale alternativelor:

- salariul aferent
- posibilitatea de a avansa
- locația firmei.

Dacă am considera un singur criteriu de evaluare, de exemplu salariul, avem de a face cu „ **a single criterion decision problem**”. In acest caz vom alege firma ce oferă cel mai mare salariu.

În cazul în care luăm în considerare toate cele trei criterii prezentate, avem „**a multicriteria decision problem**”. Evaluarea se complică în cazul posibilităților de avansare şi a locației firmei deoarece se bazează pe factori subiectivi.
Vom face aceste evaluări folosind date categoriale: slab, satisfăcător, mediu, bun, excelent.

Date pentru evaluarea unei oferte de serviciu.

Alternativa	Salariu Euro/lună	Posibilități de avansare	Locația firmei
Craiova	300	bune	excelent
București	600	mediu	bun
Cluj-Napoca	500	satisfăcătoare	satisfăcătoare

Etapa de alegere a alternativei convenabile prezintă reale dificultăţi deoarece pe de o parte criteriile nu au aceeaşi importanţă, iar pe de altă parte nici o alternativă nu este cea mai bună în raport cu toate criteriile.

Vom prezenta pe parcursul acestei lucrări, metode de abordare a acestei probleme. Deocamdată considerăm că în cazul nostru alternativa 1 pare a fi cea mai bună.

În luarea deciziilor, „**decision making**” ne vom ocupa de problemele întâlnite de managerii reali puşi în situaţia de a lua decizii.
Această etapă constă în structurarea problemei şi analizarea acesteia.
Faza de analiză din luarea deciziei are două aspecte: calitativ şi cantitativ.

Analiza calitativă se bazează pe experiența și raționamentul managerului. Dacă acesta nu are experiență în probleme similare sau dacă problema este complexă, analiza cantitativă este esențială.
In abordarea cantitativă analistul se concentrează pe datele cantitative asociate cu problema şi dezvoltă expresii matematice ce descriu obiectivele, restricțiile (constrângerile) şi alte relații existente în problemă.

Analiza cantitativă este absolut necesară în procesul de luare a unei decizii în următoarele cazuri:

- problema este complexă;
- problema este importantă fiind în joc o sumă mare de bani
- problema este nouă, managerul neavând experiența necesară pentru a o rezolva
- problema este repetitivă şi utilizând abordarea cantitativă managerul va face economie de timp şi de efort.

O etapă dificilă în procesul de luare a unei decizii este transformarea unei probleme din realitate într-o problemă bine definită, care să permită o abordare cantitativă. De exemplu clasica problemă de inventar necesită o definire clară în termeni de obiective specifice şi restricţii de operare. Colaborarea cu utilizatorul este esenţială pentru a defini adecvat problema.

Modelele sunt reprezentări ale obiectelor sau ale situațiilor reale.

Menționăm trei tipuri de modele:

- modele iconice, „**iconic models**” sunt replici fizice ale obiectelor reale (de exemplu macheta unui avion, macheta unei construcții sau un camion jucărie).

- modele analogice, „ **analog models**” sunt modelele ce nu au aceeași înfățișare fizică cu obiectul ce urmează a fi modelat, dar în fond reprezintă același lucru (de exemplu poziția acului de la vitezometrul unui automobil reprezintă viteza vehiculului sau poziția mercurului termometrului reprezintă temperatura).

- modelele matematice reprezintă problema printr-un sistem de simboluri şi relații matematice (de exemplu profitul obținut din vânzarea unui produs se calculează înmulțind profitul pe unitatea de produs cu cantitatea vândută)

Herbert A Simon, deținător al premiului Nobel pentru economie, specialist în teoria deciziilor spunea că modelele matematice nu trebuie să fie identice cu realitatea ci cât mai apropiate de aceasta şi să conducă la rezultate mai bune decât cele obținute prin logica bunului simț.

Intr-o problemă managerială avem:

- un obiectiv specific, cum ar fi maximizarea profitului sau minimizarea costurilor
- o mulțime de restricții (constrângeri) cum ar fi capacitățile de producție.

Astfel un model matematic reușit este acela care exprimă cu acuratețe prin relații matematice obiectivul și restricțiile. Expresia matematică ce descrie obiectivul problemei se numește **funcție obiectiv**.

exemplu

Considerăm un produs prin vânzarea căruia se obține un profit de 10 Ron pe unitatea de produs. Notând cu x numărul de unități vândute, profitul total obținut prin vânzarea celor x unități este:

$$P = 10 \cdot x$$

Funcția obiectiv este $P = 10 \cdot x$ și urmează a fi maximizată.

Pentru producerea unei unități de produs este nevoie de 5 ore și într-o săptămână avem 40 de ore lucrătoare. Notând cu x numărul de unități produse săptămânal obținem restricția:

$$5 \cdot x \leq 40$$

Problema constă în a decide câte unități pot fi produse în fiecare săptămână pentru maximizarea profitului, modelul matematic fiind:

Maximizați $P = 10 \cdot x$ (funcția obiectiv)
cu restricțiile:

$$5 \cdot x \leq 40 \text{ și } x \geq 0$$

În acest caz simplu soluția optima este $x = 8$.

Exemplul prezentat este un model de **programare liniară**, tehnică asupra căreia vom reveni.

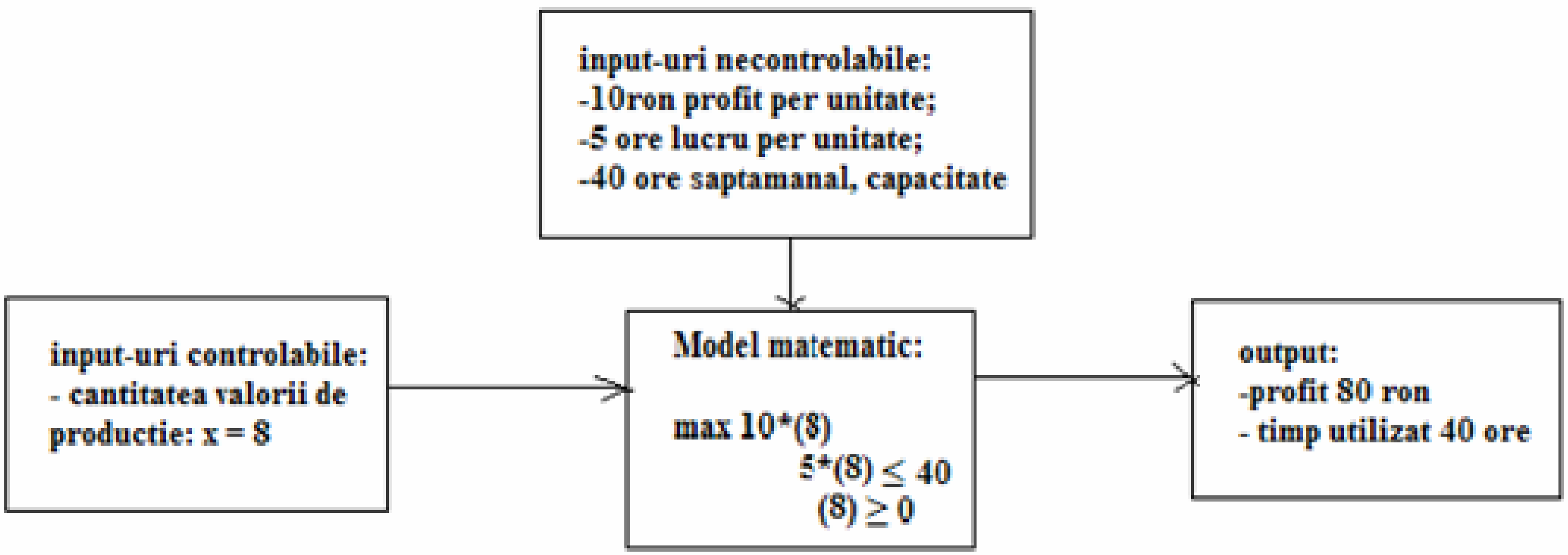
Există două tipuri de date de intrare, (input-uri), care influențează atât funcția obiectiv cât și restricțiile:

- datele necontrolabile, „**uncontrollable inputs**” provin din mediul înconjurător și nu pot fi influențate de cel ce ia decizia, „**decision maker**”;
- datele controlabile, „**controllable inputs**” sunt decizii alternative ale managerului și sunt cunoscute sub numele de variabile de decizie, „**decision variables**” ale modelului.

În exemplul anterior profitul pe unitatea de produs (10Ron), timpul de producție al unei unități de produs (5 ore), capacitatea de producție (40 ore) sunt input-uri necontrolabile, în timp e cantitatea de produs x este un input controlabil

În concluzie odată specificate input-urile necontrolabile şi cele controlabile se pot evalua funcția obiectiv şi restricțiile şi se determină output-ul modelului.

Revenim la exemplul anterior şi prezentăm *graficul fluxului modelului*:



Se poate întâmpla ca un input necontrolabil să poată fi transformat în input controlabil. În exemplul nostru capacitatea de lucru săptămânală (40 ore) poate fi modificată prin angajarea unui număr mai mare de muncitori şi organizarea lucrului în două schimburi.

Un **model determinist** este un model matematic în care input-urile necontrolabile sunt cunoscute şi nu pot varia. Taxele şi impozitele percepute de stat nu pot fi influențate de manager şi astfel un model matematic ce are ca input-uri necontrolabile taxe şi impozite percepute de stat este un model deterministic.

Există input-uri necontrolabile incerte, supuse variațiilor cum ar fi cererea unui anumit produs. Un model matematic ce are input-uri necontrolabile supuse variațiilor este un **model stochastic**.

Un **model determinist** este un model matematic în care input-urile necontrolabile sunt cunoscute şi nu pot varia. Taxele şi impozitele percepute de stat nu pot fi influențate de manager şi astfel un model matematic ce are ca input-uri necontrolabile taxe şi impozite percepute de stat este un model determinist.

Există input-uri necontrolabile incerte, supuse variațiilor cum ar fi cererea unui anumit produs. Un model matematic ce are input-uri necontrolabile supuse variațiilor este un **model stochastic**.

Dacă în modelul prezentat anterior numărul de ore necesare pentru producerea unei unități de produs poate varia între 3 și 6, depinzând de calitatea materiilor prime folosite, modelul ar deveni un model stochastic.

Pregătirea datelor (valorilor input-urilor necontrolabile) cerute de model este următorul pas în analiza cantitativă. În general valorile input-urilor necontrolabile nu sunt disponibile imediat și astfel analistul folosește niște notații generale pentru dezvoltarea modelului.

De exemplu, notând:

- c = profitul per unitate,
- a = timpul de producție per unitate,
- b = capacitatea de producție în ore,

modelul prezentat anterior va fi:

Maximizați $P = c \cdot x$ (funcția obiectiv)
cu restricțiile:

$$a \cdot x \le b \text{ şi } x \ge 0$$

Următorul pas al analizei cantitative îl constituie găsirea **soluției optime** a modelului. Analistul va alege acele variabile de decizie ce duc la cel mai convenabil output al modelului, variabile numite **soluția optimă a modelului.**

In cazul exemplului prezentat vom determina valoarea cantității de produse care maximizează profitul, satisfăcând restricțiile impuse.

Dezvoltarea unui model şi aflarea soluției acestuia sunt două etape strâns legate. Dacă încercăm să construim un model matematic ce redă cu acuratețe situația reală, şansele de a găsi soluția optimală sunt de cele mai multe ori inexistente. În concluzie în general se preferă un model mai simplu, ce permite obținerea unei soluții optimale, chiar dacă aceasta este o aproximare rudimentară a celei mai bune decizii.

Atât analistul, cât şi managerul sunt interesaţi cât de bună este de fapt soluţia găsită. **Testarea si validarea** se realizează utilizând probleme ale căror soluţii sunt cunoscute. Dacă sunt identificate eventuale minusuri cum ar fi lipsa de acurateţe este necesar fie modificarea modelului, fie introducerea altor date de intrare.

În final, pe baza soluției optimale a modelului matematic se pregătește un **raport managerial**, care să fie ușor de înțeles de factorii de decizie. Acest raport conține decizia recomandată și alte indicații pertinente. Managerul va urmări evoluția deciziei implementate. Uneori procesul real poate cere extinderi sau rafinări ale modelului matematic.

Prezentăm câteva modele cantitative întâlnite în aplicațiile economice:

Costul si volumul productiei

Costul unei producții este funcție de volumul acesteia.

Uzual **costul** este definit ca fiind suma costurilor fixe cu costurile variabile. Costurile fixe nu depind de volumul producției în timp ce costurile variabile sunt funcții de volumul producției.
De exemplu, pentru o linie e producție costul fix este de 4000 Ron. Pentru unitatea de produs materialele folosite și muncă depusă însumează 20 Ron. Modelul cost/volum al producției va fi:

$$C(x) = 4000 + 20 \cdot x \qquad (1)$$

unde $C(x)$ este costul total de producție a x unități.

Dacă $C(x)$ reprezintă costul producerii a x unități, costul producerii al celei de-a x_0+1 unități este $C(x_0+1)-C(x_0)$.

Costul marginal estimează efectele produse de mici variații ale unor cantități ce apar în acest fenomen economic și se definește ca fiind:

$$C'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{C(x_0+h)-C(x_0)}{h}$$

Venitul si volumul vanzarilor

Suntem interesați de venitul ce va fi obținut, asociat cu vânzarea unui număr de unități de produs. Presupunând că unitatea de produs menționată anterior se vinde cu 100 Ron, venitul total va fi

$$R(x) = 100 \cdot x \qquad (2)$$

unde x este volumul vânzărilor în unități.
$R(x)$ reprezintă venitul asociat cu vânzarea a x unități.

Venitul marginal este definit ca fiind rata de schimb a venitului total în funcție de volumul vânzărilor:

$$R'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{R(x_0 + h) - R(x_0)}{h}$$

În cazul modelului nostru venitul marginal este de 100 și nu depinde de volumul vânzărilor.

Profit si (volum al productiei plus volum al vanzarilor)

Unul din cele mai importante criterii în luarea deciziilor este profitul.

Presupunând că se produce doar ce poate fi vândut, volumul producției va fi egal cu volumul vânzărilor.
Vom combina ecuațiile (1) și (2) pentru a dezvolta un model ce determină profitul asociat cu volume specifice de producție și vânzare.

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) = \\ &= 100 \cdot x - (4000 + 20 \cdot x) = -4000 + 80 \cdot x \end{aligned} \tag{3}$$

Presupunând că o prognoză indică vânzarea a 40 unități de produs, decizia de a produce şi a vinde aceste 40 unități va duce la următorul profit

$$P(40) = -4000 + 80 \cdot 40 = -800,$$

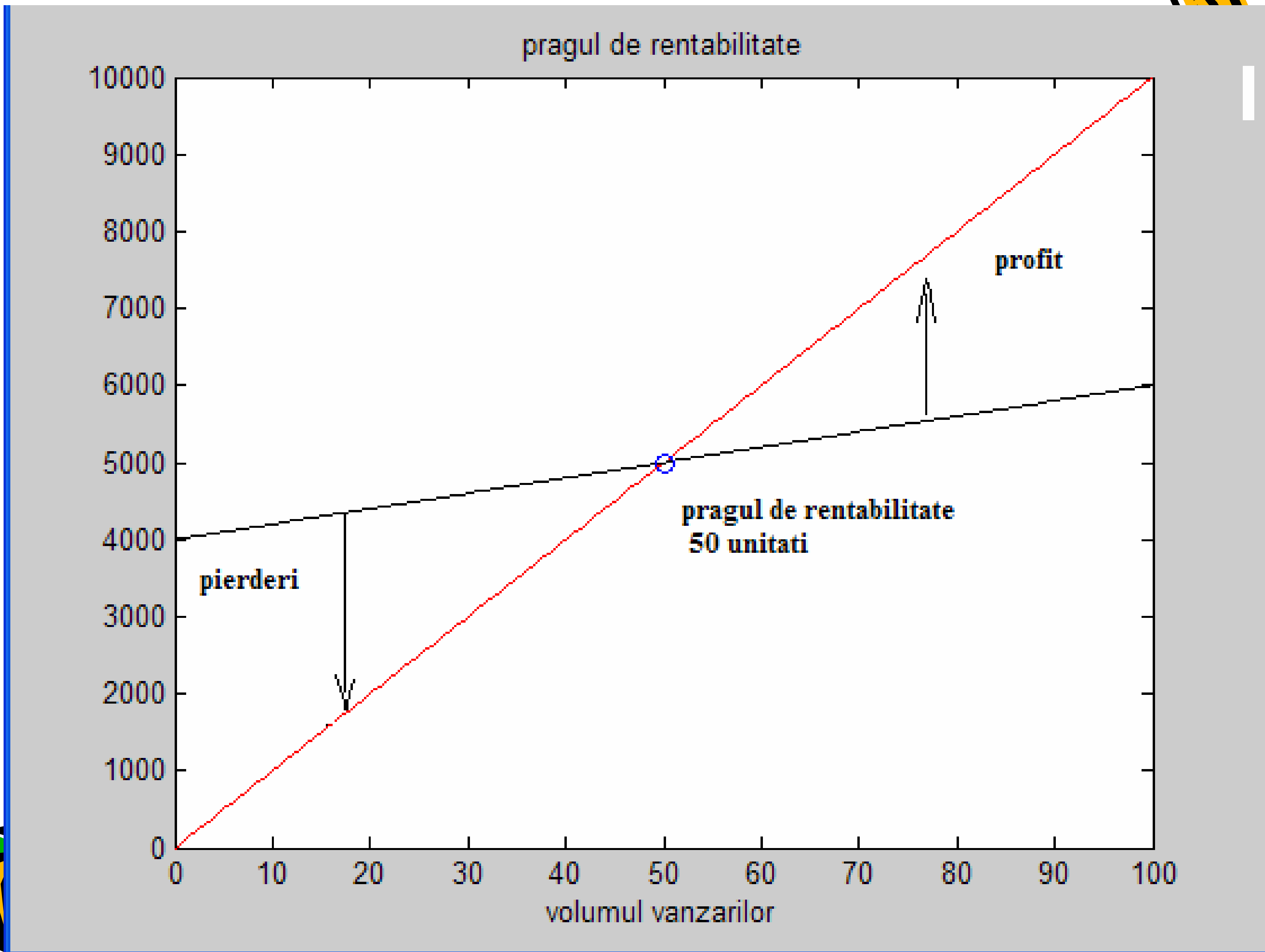
adică o pierdere de 800 Ron. În aceste condiţii managerul poate decide oprirea fabricării acestui produs.

Dacă vor fi cerute la vânzare 500 unități de produs profitul va fi

$$P(500) = -4000 + 80 \cdot 500 = 36000$$

şi s-ar părea că profitul este suficient de mare pentru a justifica producția şi vânzarea.

In general volumul de producție pentru care veniturile din vânzări egalează costurile se numeşte **prag de rentabilitate**, „ **break-even point**”.


pragul de rentabilitate
10000
9000
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
volumul vanzarilor
profit
pragul de rentabilitate
50 unitati
pierderi

Programarea liniara metoda grafica

In matematică problemele de programare liniară sunt probleme de optimizare în care funcția obiectiv și restricțiile sunt liniare. Este de menționat faptul că soluțiile ce urmează a fi găsite sunt numere reale. Programarea liniară este utilizată în rezolvarea problemelor de optimizare pe termen mediu și lung, așa numitele probleme strategice și tactice.

Domeniile de aplicație sunt variate. atât din punct de vedere al naturii problemelor abordate (planificarea şi controlul producției, distribuția în rețele) cât şi din punctul de vedere al sectoarelor industriale (industria manufacturieră, energetică (petrol, gaz, electricitate. energie nucleară), transporturi (aeriene, rutiere, feroviare), telecomunicații, finanțe.

Pentru a formula matematic o problema de programare liniară, să presupunem cu două variabile de decizie avem de parcurs următoarele etape:

- Identificarea variabilelor de decizie (acele variabile a căror valoare urmează a fi determinată) şi notarea lor cu x_1 şi x_2.
- Identificarea mulţimii restricţiilor şi exprimarea acestora prin inegalităţi ce au ca termeni variabilele de decizie. Aceste restricţii sunt condiţiile iniţiale date.
- Identificarea funcţiei obiectiv ca o aplicaţie liniară de variabilele de decizie.
- Adăugarea condiţiilor de non-negativitate în cazul în care valorile negative ale variabilelor de decizie nu au o interpretare valabilă

exemplu

Un agricultor are H hectare de pământ arabil pe care poate produce grâu sau porumb. El are o cantitate E de îngrăşăminte şi I de insecticide. Grâul necesită E_1 îngrăşăminte la hectar şi I_1 insecticide la hectar, în timp ce porumbul necesită E_2 respectiv I_2.
Fie P_1 prețul de vânzare al grâului şi P_2 prețul de vânzare al porumbului.

Numărul optim de hectare plantate cu grâu şi porumb, pentru a obține cel mai mare venit net, va fi exprimat ca o problemă de programare liniară:

Numărul de hectare plantate cu grâu respectiv cu porumb, notate cu x_1 şi x_2 sunt variabilele de decizie.

Funcţia obiectiv este profitul net $P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2$:

maximizaţi $P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2$ (maximizaţi venitul net) cu următoarele restricţii:

$$x_1 + x_2 \le H$$

$$E_1 \cdot x_1 + E_2 \cdot x_2 \le E$$

$$I_1 \cdot x_1 + I_2 \cdot x_2 \le I$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

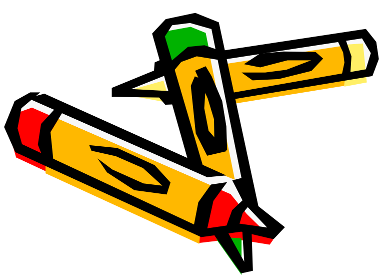
In cazul a n variabile de decizie $x_1, x_2, \ldots, x_n$, funcția obiectiv este o aplicație liniară de forma

$$z = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n$$

Dacă putem găsi valorile variabilelor de decizie ce optimizează funcția obiectiv, vom spune că aceste valori ale lui x_i, $i = 1, \ldots n$ sunt soluția optimală a problemei de programare liniară.

Considerăm necesară prezentarea generală a unor aplicații tipice de programare liniară:

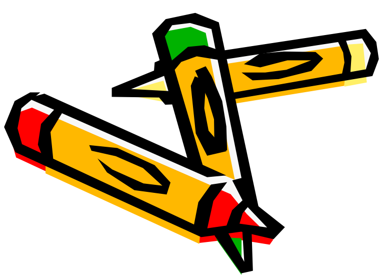
- O firma manufacturieră dorește să-și planifice producția și să dezvolte o politică de inventariere care să satisfacă viitoarele cerințe de piață. Obiectivul este de a minimiza producția totală și costurile de inventar, satisfăcând complet cererea pieței. Restricțiile sunt date de cerere și de capacitatea de producție.



- Un analist financiar are de ales un portofoliu de investiții dintr-o varietate de stocuri și alternative de investiții corespunzătoare. Problema constă în stabilirea portofoliului ce maximizează câștigul investiției. Restricțiile sunt determinate de venitul total alocat acestor investiții și de plafonul maxim al investiției într-un anumit domeniu.

- Un manager de marketing dorește să aloce bugetul destinat publicității în diferite mijloace media: radio, televiziune, ziare, reviste, internet. El dorește să găsească soluția ce maximizează eficiența publicității. Restricțiile sunt date de valoarea bugetului alocat publicității și de disponibilitatea mijloacelor media.

- O companie are magazine de desfacere în mai multe orașe din țară. Tinând seama de cererile locale, se încearcă stabilirea cantităților de produse ce vor fi expediate fiecărui magazin, astfel încât costurile totale de transport să fie minimizate. Restricțiile sunt date de cantitatea de produse furnizate fiecărui magazin.



Metoda grafică se aplică in rezolvarea problemelor de programare liniară cu două variabile de decizie x_1 şi x_2.

Mulțimea valorilor variabilelor x_1 şi x_2, ce îndeplinesc condițiile restricțiilor se numeşte **mulțimea soluțiilor admisibile.** Primul pas al metodei constă în determinarea acestei mulțimi:

Presupunând că avem restricțiile $x_1 \geq 0$ și $x_2 \geq 0$, ne vom situa in primul cadran al planului.

Restricțiile sunt de forma $a_j \cdot x_1 + b_j \cdot x_2 \leq c_j$ sau $a_j \cdot x_1 + b_j \cdot x_2 \geq c_j$, $j = 1, \ldots, p$.

Vom desena dreapta $a_j \cdot x_1 + b_j \cdot x_2 = c_j$, dreaptă ce împarte planul în două regiuni, R_1^j și R_2^j. Dacă originea satisface restricția dată, regiunea ce conține originea va fi cea căutată.

Intersecția acestor regiuni este mulțimea soluțiilor admisibile.

Metoda de aflare a soluției optimale se bazează pe următoarea propoziție:

Soluția optimală a unei probleme de programare liniară, dacă există se află în vârfurile (colțurile) mulțimii soluțiilor admisibile.

În terminologia programării liniare aceste vârfuri se numesc **puncte extreme** ale mulțimii soluțiilor admisibile.

- se reprezintă grafic mulțimea soluțiilor admisibile;
- se calculează coordonatele punctelor extreme ale acestei regiuni;
- se calculează valoarea funcției obiectiv în aceste puncte extreme;
- se identifică punctul extrem în care valoarea funcției este maximă, (respectiv minimă, în funcție de problemă);
- coordonatele acestui punct sunt valorile optimale.

exemplu

Prezentăm un exemplu de problemă de programare liniară, ce **maximizează** funcția obiectiv:

Firma X este specializată pe producția genților de voiaj. Managerul firmei dorește să producă două noi modele: genți de preț mediu și genți de lux. Distribuitorul firmei a fost încântat de inițiativă și a acceptat să cumpere producția pe trei luni ale acestor modele.

Producerea fiecărei genți necesită următoarele operații :

- croirea și vopsirea materialului
- coaserea materialului
- finisarea produsului
- verificarea și ambalarea.

Managerul analizând fiecare operație a concluzionat că:

- pentru o geantă standard (de preț mediu) este nevoie de 42 minute pentru croirea şi vopsirea materialului, 30 minute pentru coaserea materialului, o oră pentru finisare şi 6 minute pentru verificare şi ambalare.

- pentru o geantă lux este nevoie de o oră pentru croirea şi vopsirea materialului, 50 minute pentru coaserea materialului, 40 minute pentru finisare şi 15 minute pentru verificare şi ambalare

Timpi de producție

Produs	Croire/vopsire	Coasere	Finisare	ambalare
geantă standard	42 min	30 min	60 min	6 min
geantă de lux	60 min	50 min	40 min	15 min

Obiectivul firmei constă în maximizarea profitului total.
Pentru a construi modelul matematic vom nota cu x_1 numărul de genți standard și x_2 numărul de genți de lux. Firma realizează un profit de 10 Ron pentru o geantă standard și un profit de 9 Ron pentru o geantă de lux. Profitul total, pe care îl notăm cu z va fi:

$$z = 10 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2$$

Problema constă în alegerea variabilelor x_1 şi x_2 pentru care să obținem cel mai mare profit z. In terminologia specifică programării liniare x_1 şi x_2 sunt variabilele de decizie şi z, care este funcție de variabilele de decizie este funcția obiectiv.

Scopul firmei X este să maximizeze funcția obiectiv.

$$\max z = \max(10 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2)$$

Orice combinație a numărului de genți standard și a numărului de genți de lux este o soluție a problemei. Soluțiile admisibile sunt acele soluții care satisfac toate restricțiile. Soluția admisibilă care duce la cel mai mare profit este soluție optimală.
Firma X dispune de 630 ore pentru croit/vopsit, 600 ore pentru coasere, 708 ore pentru finisare, 135 ore pentru verificare/ambalare și astfel obținem restricțiile:

$$\frac{7}{10} \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 630$$

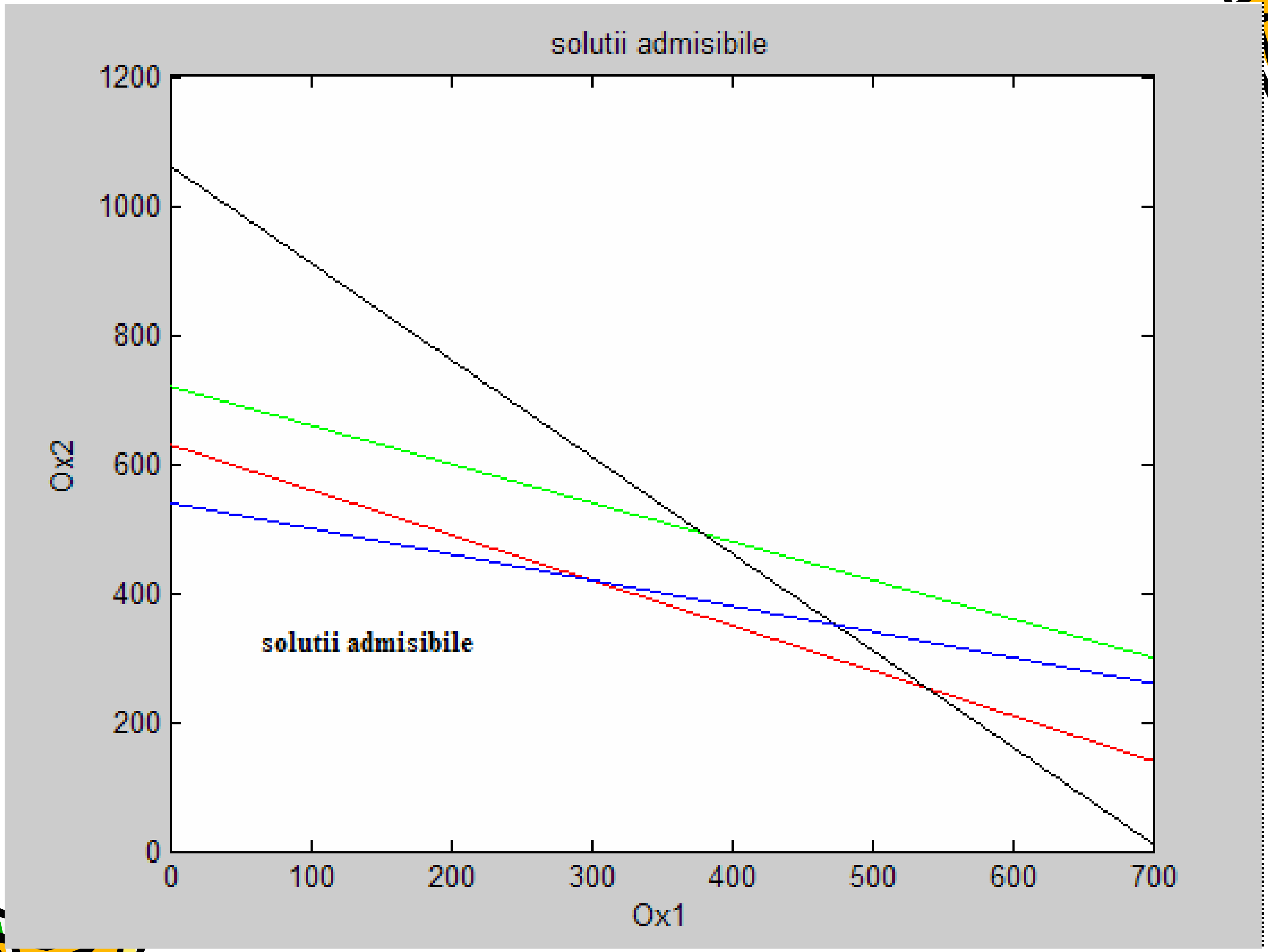
$$\frac{1}{2} \cdot x_1 + \frac{5}{6} \cdot x_2 \leq 600$$

$$1 \cdot x_1 + \frac{2}{3} \cdot x_2 \leq 708$$

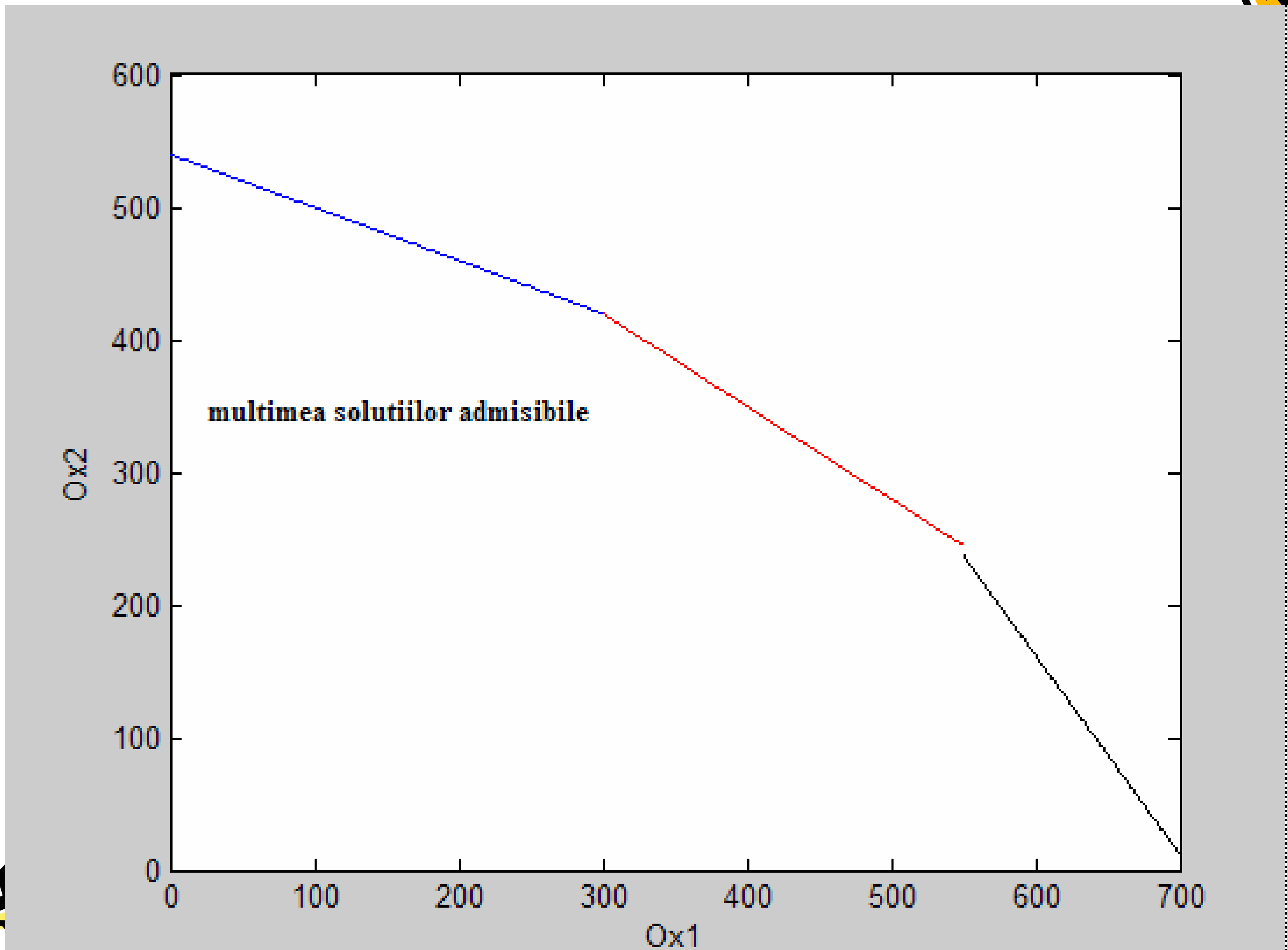
$$\frac{1}{10} \cdot x_1 + \frac{1}{4} \cdot x_2 \leq 135$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Pentru început vom desena mulțimea soluțiilor admisibile



solutii admisibile
1200
1000
800
600
400
200
0
Ox2
solutii admisibile
0
100
200
300
400
500
600
700
Ox1



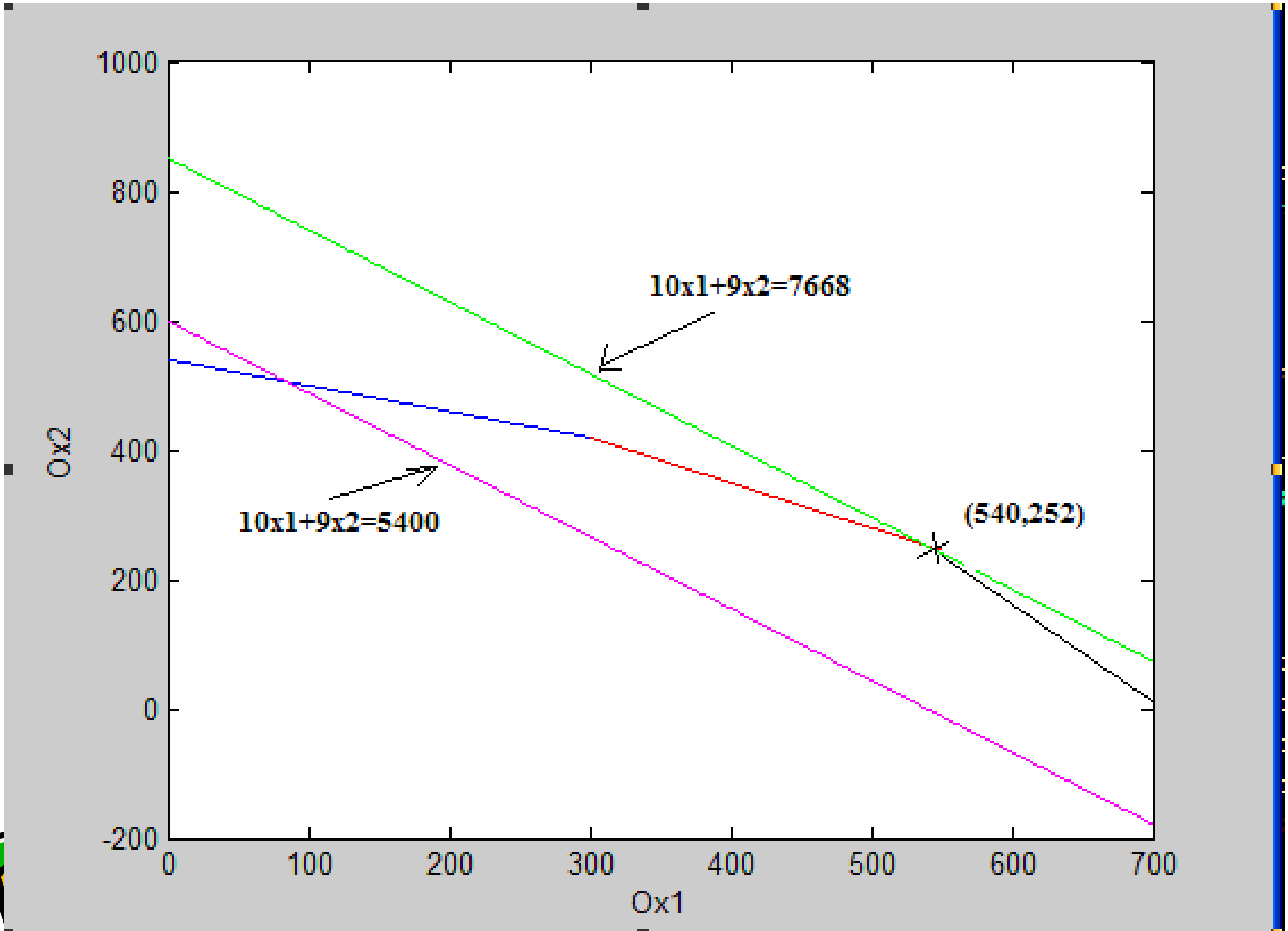
600
500
400
300
200
100
0
0
100
200
300
400
500
600
700
Ox2
Ox1
multimea solutiilor admisibile

Vom desena dreptele ce reprezintă graficul funcției obiectiv, pentru diferite valori ale lui z. Una din aceste drepte are un singur punct comun cu mulțimea soluțiilor admisibile, punct ce va da soluția optimală a problemei.

Ecuația dreptei ce reprezintă profitul este

$$x_2 = -\frac{10}{9}x1 + \frac{1}{9}z$$

și desenăm drepte de coeficient unghiular $-\frac{10}{9}$.



1000
800
600
400
200
0
-200
0
100
200
300
400
500
600
700
Ox1
Ox2
10x1+9x2=7668
10x1+9x2=5400
(540,252)

Utilizând metoda grafică obținem că punctul optimal se află la intersecția dreptelor

$$\frac{7}{10} \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 630$$

$$x_1 + \frac{2}{3} \cdot x_2 = 708$$

și prin rezolvarea sistemului obținem $x_1 = 540$, $x_2 = 252$

Astfel prin producerea a 540 genți standard și 252 genți de lux se obține un profit maxim de 7668 Ron.

Firma X este interesată de timpii de producție (în ore) în acest caz:

- croirea și vopsirea materialului: $\frac{7}{10} \cdot 540 + 252 = 630$
- coaserea materialului: $\frac{1}{2} \cdot 540 + \frac{5}{6} \cdot 252 = 480$
- finisarea produsului: $540 + \frac{2}{3} \cdot 252 = 708$
- verificarea și ambalarea: $\frac{1}{10} \cdot 540 + \frac{1}{4} \cdot 252 = 117$

Aceste calcule arată managerului că în departamentul de coasere rămân 120 ore nefolosite, în timp ce in departamentul de verificare/asamblare sunt 18 ore nefolosite, ore ce sunt de fapt timpi morți.

Uneori în problema de programare liniară se adaugă noi variabile corespunzătoare acestor timpi morți, cunoscute în terminologia specializată că variabile de reducere „ **slack variables**”.
Funcția obiectiv nu se schimbă, deoarece aceste variabile nu contribuie la valoarea profitului, deci au coeficientul zero.

După introducerea acestor variabile, avem următorul model matematic:

$$\max: \quad 10 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3 + 0 \cdot s_4$$

$$\begin{aligned}
&\frac{7}{10} \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot s_1 = 630 \\
&\frac{1}{2} \cdot x_1 + \frac{5}{6} \cdot x_2 \qquad + 1 \cdot s_2 = 600 \\
&1 \cdot x_1 + \frac{2}{3} \cdot x_2 + \qquad + 1 \cdot s_3 = 708 \\
&\frac{1}{10} \cdot x_1 + \frac{1}{4} \cdot x_2 + \qquad 1 \cdot s_4 = 135 \\
&x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0
\end{aligned}$$

Un model de programare liniară, ale cărui restricții sunt egalități este scris în forma **standard.**

Pentru soluția optimală $x_1 = 540$, $x_2 = 252$, valorile variabilelor „slack” sunt:

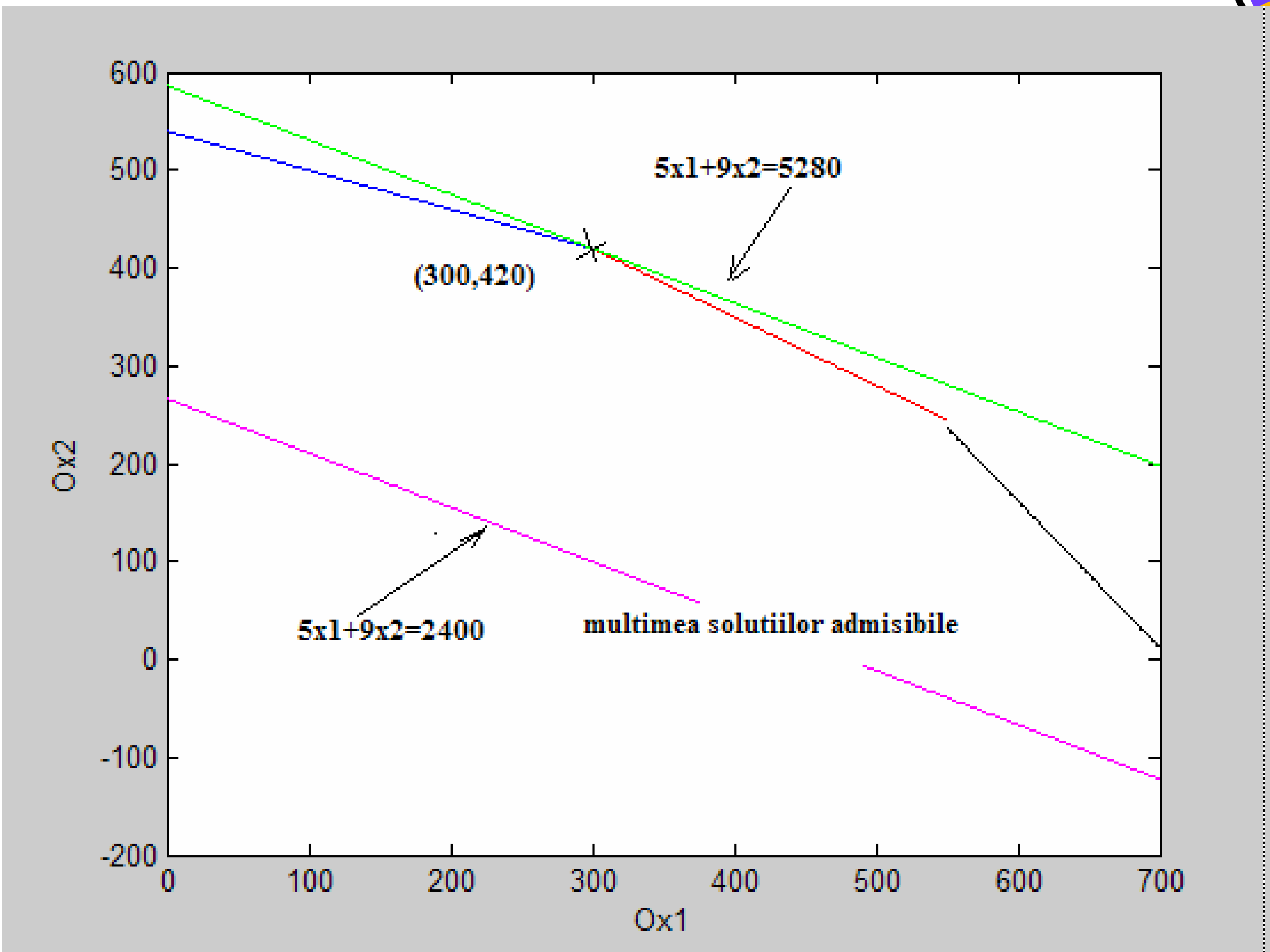
$$s_1 = 0,\ s_2 = 120,\ s_3 = 0,\ s_4 = 18$$

Presupunem că profitul adus de o geantă standard este de 5 Ron, in timp ce profitul adus de o geantă de lux rămâne neschimbat, restricțiile privitoare la timpii de lucru fiind același.

Astfel în modelul matematic se schimba doar funcția obiectiv:

$$\max z = \max(5 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2)$$

Mulțimea soluțiilor admisibile rămâne aceeași, deoarece restricțiile sunt neschimbate.



5x1+9x2=5280
(300,420)
5x1+9x2=2400
multimea solutiilor admisibile
Ox2
Ox1
600
500
400
300
200
100
0
-100
-200
0
100
200
300
400
500
600
700

Soluția optimală se află la intersecția dreptelor

$$\frac{7}{10}\cdot x_1 + 1\cdot x_2 = 630$$

$$\frac{1}{10}\cdot x_1 + \frac{1}{4}\cdot x_2 = 135$$

și este $x_1 = 300,\ x_2 = 420$

În problema prezentată mulțimea soluțiilor admisibile are 5 puncte extreme.
Formal, putem observa că soluția optimală a unei probleme de programare liniară poate fi găsita în punctele extreme ale mulțimii soluțiilor admisibile.
Astfel este suficient să calculăm și să comparăm profitul în aceste puncte extreme pentru a afla soluția optimală.

exemplu

vom exemplifica rezolvarea unei probleme de **minimizare**, utilizând metoda grafică:

O fabrică de produse chimice vinde două dintre produsele sale, ca materii prime pentru două companii ce produc săpunuri de baie şi detergenţi pentru rufe. Bazându-se pe analiza inventarului curent şi pe potenţialele cereri pentru luna următoare, managerii au estimat că producţia combinată a produselor 1 şi 2 trebuie să fie de 350 tone. Pe de alta parte un client important a comandat 125 tone din produsul 1.

Produsul 1 necesită două ore timp de procesare pentru o tonă, în timp ce pentru o tonă din produsul 2 timpul de procesare este de o oră.
Pentru luna următoare este disponibil un timp de procesare de 600 ore.
Producția unei tone din produsul 1 costă 2 Ron, în timp ce producția unei tone din produsul 2 costă 3 Ron
Obiectivul managerilor este să satisfacă cererile cu un cost total de producție minim.

Variabilele de decizie sunt:

x_1 = numărul de tone fabricate din produsul 1;
x_2 = numărul de tone fabricate din produsul 2;

Funcția obiectiv este minimizarea costului producției totale:

$$\min(2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2)$$

Din datele problemei, vom scrie restricțiile impuse:

- pentru satisfacerea cererii clientului important x_1 trebuie să fie cel puțin 125 tone

$$x_1 \geq 125$$

- producția combinată a celor doua sortimente este cel puțin 350 tone:

$$x_1 + x_2 \geq 350$$

- capacitatea de producție este de cel mult 600 ore:

$$2 \cdot x_1 + x_2 \leq 600$$

- în final adăugăm restricțiile de non-negativitate:

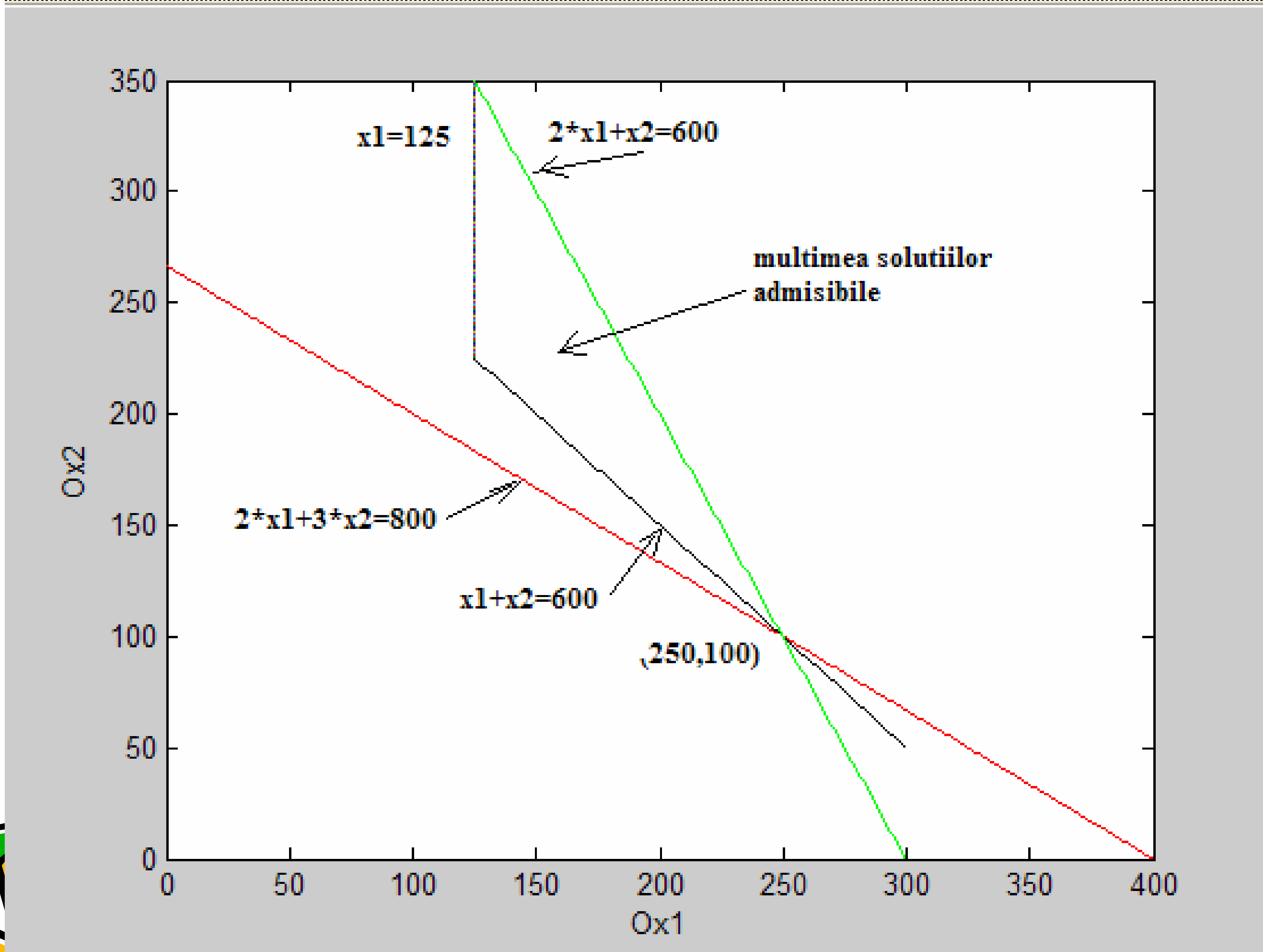
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Având doar două variabile de decizie se poate aplica metoda grafică.
Vom desena pentru început mulțimea soluțiilor admisibile.
Punctele de extrem ale acestei regiuni sunt:

(250,100); (125,225); (125,350)

Prezentăm valorile funcției $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2$ în aceste puncte:

$f(250,100) = 800$
$f(125,225) = 925$
$f(125,350) = 1300$



x1=125
2*x1+x2=600
multimea solutiilor admisibile
2*x1+3*x2=800
x1+x2=600
(250,100)
Ox2
Ox1
0
50
100
150
200
250
300
350
400

În concluzie minimul funcției este în punctul (250,100), valoarea sa fiind 800.

Analiza completă a soluției costului minim arată că producția dorită de 350 tone a fost obținută utilizând timpul de producție disponibil de 2*250+1*100 = 600 ore.
Restricția ce definește cererea produsului 1 a fost satisfăcută cu x_1 = 250 tone, ceea ce înseamnă că a depășit nivelul minim impus cu 125 tone.
Această producție excedentară este considerată în limbajul uzual al programării liniare ca fiind un **surplus**.

Pentru a obține o problemă de programare liniară standard, variabilele de surplus apar în funcția obiectiv având coeficientul zero. Inegalitățile ce definesc restricțiile le vom transforma in egalități adăugând variabilele de surplus cu semnul minus, în timp ce variabilele de reducere se adaugă cu semnul plus:

$$\min(2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3)$$

$$x_1 \qquad\qquad -1 \cdot s_1 = 125$$

$$x_1 + x_2 \qquad\qquad -1 \cdot s_2 = 350$$

$$2 \cdot x_1 + x_2 \qquad\qquad +1 \cdot s_3 = 600$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

In concluzie:

- restricție de tipul $a_i \cdot x_1 + b_i \cdot x_2 \leq c_i$ necesită o variabilă de reducere,
- o restricție de tipul $a_i \cdot x_1 + b_i \cdot x_2 \geq c_i$ necesită o variabilă de surplus.

Pentru rezolvarea unei probleme de programare liniară cu metoda grafică nu este necesară scrierea problemei în forma standard.

Solutii optimale alternative

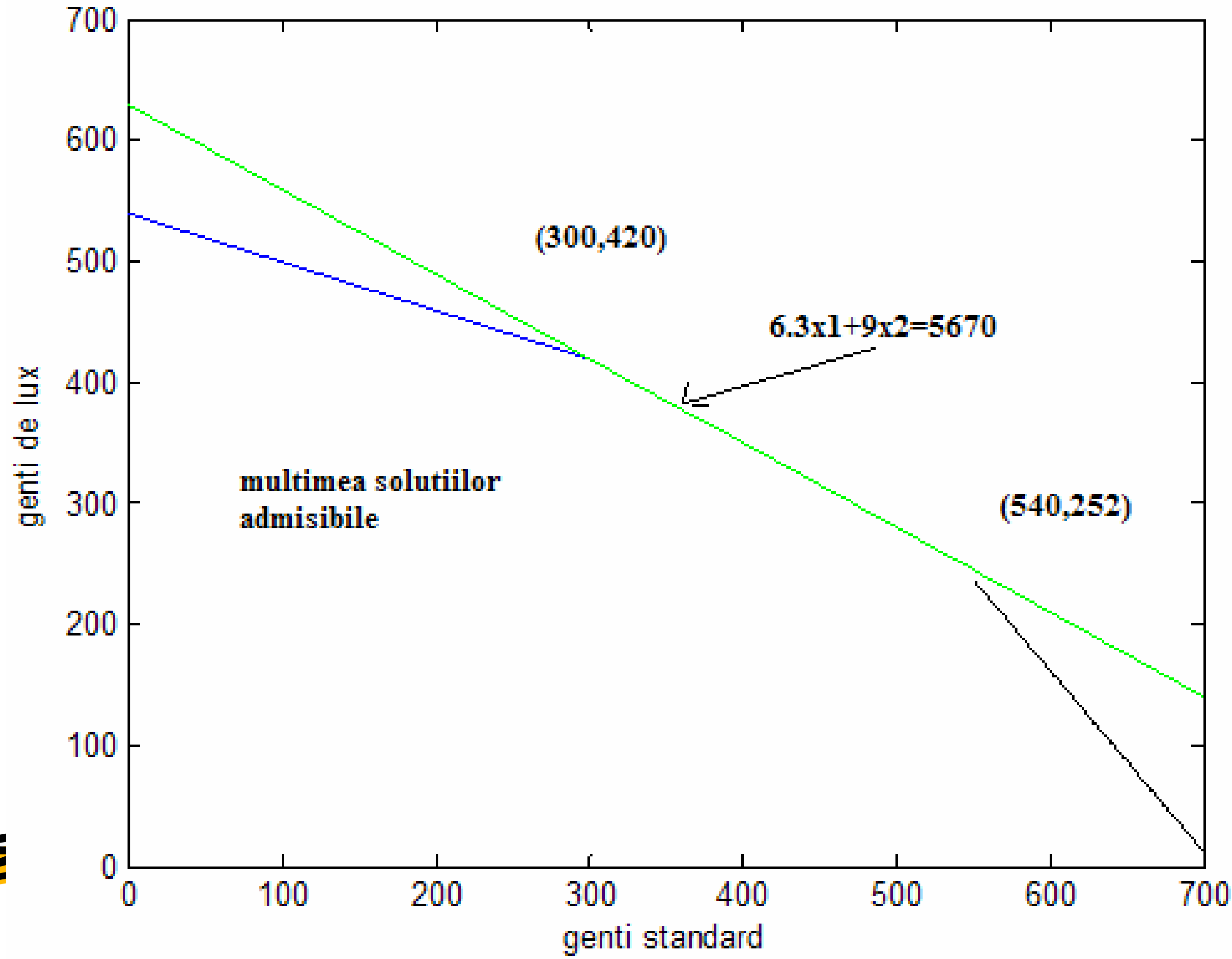
Considerăm cazul particular când graficul funcției obiectiv coincide cu una din dreptele ce constituie frontiera mulțimii soluțiilor admisibile.
În acest caz există mai multe soluții pentru optimizarea funcției obiectiv, așa numitele **soluții optimale alternative**.

Reluăm exemplul cu genţile de voiaj, considerând aceleaşi restricţii. Modificarea constă în faptul că profitul pentru geanta standard este 6.3 Ron şi astfel funcţia obiectiv va fi $f(x_1, x_2) = 6.3 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2$.

Cele două puncte extreme ale mulţimii soluţiilor admisibile sunt (300,420) şi (540,252)

Valoarea funcţiei obiectiv în aceste puncte este aceeaşi

$f(300, 420) = f(540, 252) = 5670$



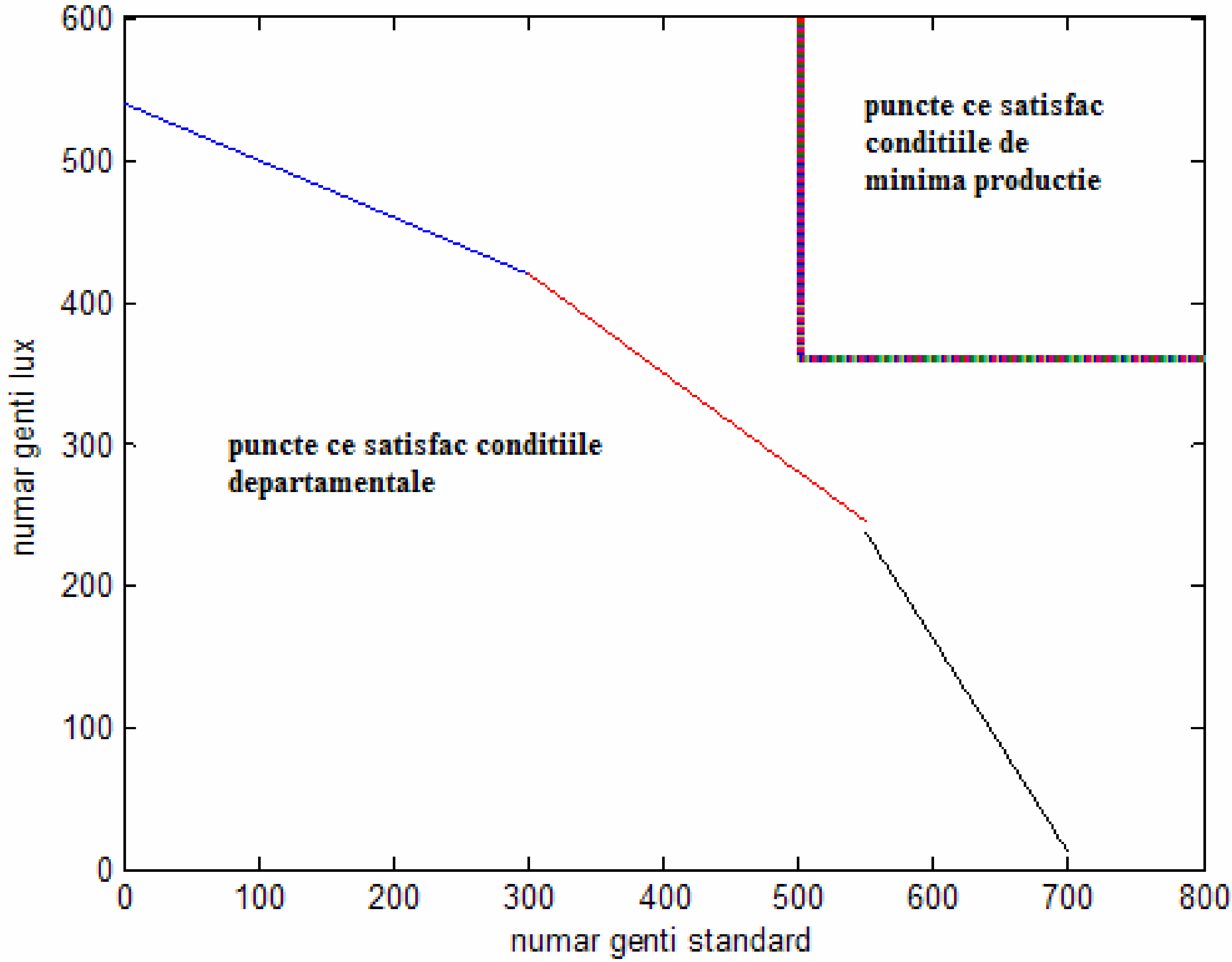
(300,420)
6.3x1+9x2=5670
multimea solutiilor
admisibile
(540,252)
genti de lux
genti standard

In plus orice punct de pe dreapta $6.3 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 = 5670$ cuprins între punctele $(300, 420)$ și $(540, 252)$ este o soluție optimală pentru funcția obiectiv.

O problemă de programare liniară cu soluții optimale alternative este situația ideală pentru cel desemnat să ia deciziile deoarece îi oferă o largă gamă de soluții optime.

Solutii inexistente

În practică apar probleme cu soluții nerealizabile, deoarece managerul firmei are pretenții prea mari sau sunt impuse prea multe restricții.
In cazul în care într-o problemă de programare liniară mulțimea soluțiilor admisibile este vidă spunem ca nu există soluții ale respectivei probleme.
Reluăm exemplul cu gențile de voiaj adăugând noi cerințe:
Presupunem că managerul a cerut fabricarea a cel puțin 500 de genți standard și cel puțin 360 genti de lux.



600
500
400
300
200
100
0
0
100
200
300
400
500
600
700
800
numar genti lux
numar genti standard
puncte ce satisfac conditiile de minima productie
puncte ce satisfac conditiile departamentale

În termenii acestei probleme inexistența soluțiilor poate fi astfel explicată factorilor de decizie:
având în vedere resursele existente (timpul de producție pentru croire/ vopsire, coasere, finisare și ambalare) nu este posibilă producerea a 500 de genți standard și 360 genți de lux.
Pe de altă parte putem indica ce modificări trebuie aduse pentru a face posibilă producerea celor 500 de genți standard și 360 genți de lux.

operația	resurse minime necesare (ore)	resurse existente (ore)	resurse adiționale necesare (ore)
croire/vopsire	$\frac{7}{10}\cdot 500+1\cdot 360=710$	**630**	**80**
coasere	$\frac{1}{2}\cdot 500+\frac{5}{6}\cdot 360=550$	**600**	**0**
finisare	$1\cdot 500+\frac{2}{3}\cdot 360=740$	**708**	**32**
ambalare	$\frac{1}{10}\cdot 500+\frac{1}{4}\cdot 360=140$	**135**	**5**

In continuare managerul va lua deciziile corecte pentru rezolvarea problemei.
Analiza problemei de programare liniară este utilă pentru a face modificările necesare în scopul punerii în aplicare a planurilor.

De reținut că nu este cazul de a face schimbări în funcția obiectiv.